



STATISTISCHE REIBWERTUNTERSUCHUNGEN 1

Bremskraftermittlung in Theorie und Praxis

Die Annahme einer Reibzahl ist bei technischen Berechnungen meist von ausschlaggebendem Einfluss auf die gesamte Dimensionierung. Anhand von Versuchen kann eine mathematisch-statistische Sicherung vorgenommen werden. Da herkömmliche Verteilungsfunktionen leider oft das Streufeld nur ungenau abbilden, wird im zweiteiligen Beitrag eine neuartige Verteilungsfunktion vorgestellt, die eine gute Übereinstimmung mit der Praxis ergibt, wie das Beispiel der Fangvorrichtung einer Standseilbahn zeigt.

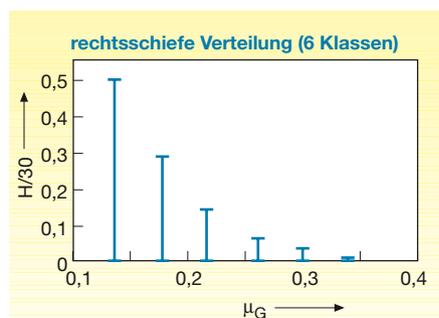
- Dr.-Ing. habil. Werner Warkenthin
- Dipl.-Ing. Reiner Thoß

1. Problemstellung

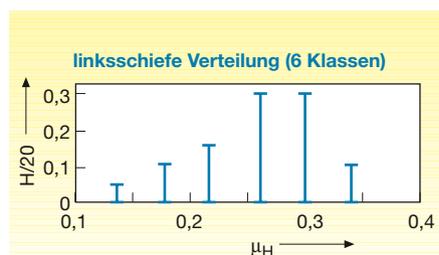
Da das Coulombsche Reibungsgesetz hinlänglich bekannt ist, könnte angenommen werden, dass es zum Übertragen von Kräften durch Reibung keine offenen Fragen mehr gibt. Dem ist leider nicht so. Denn wenn Reibversuche durchgeführt werden, ergeben die gemessenen Reibwerte ein erstaunlich breites Streufeld, und es stellt sich die Frage, welcher Reibwert μ innerhalb dieses Streufeldes, beispielsweise zum Berechnen einer Bremskraft, der rechnerisch maßgebende ist:

- ▶ Ist es der Erwartungswert $\text{erw } \mu$? Das ist der arithmetische Mittelwert des Merkmalswertes μ .
- ▶ Ist es der Modalwert $\text{mod } \mu$? Das ist der mit höchster Wahrscheinlichkeitsdichte auftretende Merkmalswert μ , bei dem die im Allgemeinfall schiefe „Glockenkurve“ ihr Maximum hat.
- ▶ Oder ist es ein von der Unterschreitungswahrscheinlichkeit q abhängiger Merkmalswert μ ? Zum Beispiel
 - als unterer Endwert $\min \mu = \mu(q = 0)$ die untere Streufeldgrenze? Das ist der nur bei extrem großem, theoretisch nur bei gegen ∞ gehendem Messumfang mit Gewissheit messbare kleinstmögliche Reibwert (kleinere Reibwerte als $\min \mu$ gibt es bei der betreffenden Reibpaarung nicht).
 - als Zentralwert $\text{zentr } \mu = \mu(q = 0,5)$, auch 50-%-Quantil genannt, derjenige Reibwert, der bei sehr großem Messumfang von der einen Hälfte der Messwerte unterschritten, von der anderen Hälfte aber überschritten wird?
 - als oberer Endwert $\max \mu = \mu(q = 1)$ die obere Streufeldgrenze? Das ist der nur bei extrem großem, theoretisch nur bei

gegen ∞ gehendem Messumfang mit Gewissheit messbare größtmögliche Reibwert (größere Reibwerte als $\max \mu$ gibt es bei der untersuchten Reibpaarung nicht). Diese Frage nach dem rechnerisch maßgebenden Reibwert lässt sich nur sicherheitstheoretisch beantworten. Im Folgenden werden die erforderlichen Grundlagen dazu ge-



① Empirische Verteilung der klassierten 30 Messwerte der Gleitreibung; die Häufigkeit H gibt an, wie viele Messwerte in der betreffenden Klasse liegen



② Empirische Verteilung der klassierten 20 Messwerte der Haftreibung; die Häufigkeit H gibt an, wie viele Messwerte in der betreffenden Klasse liegen

schaffen und für die Ingenieurarbeit notwendige Angaben gemacht. Im Teil 2 des Beitrags wird abschließend gezeigt, wie und in welchem Maße es möglich ist, z. B. bei den Fangbremsen einer Standseilbahn die auf den Wagen wirkende Bremskraft und damit die Bremsverzögerung und den Bremsweg des Wagens in bestimmten, sehr eng begrenzten zulässigen Bereichen zu halten, obwohl – experimentell nachgewiesen – der Reibwert der Reibpaarung „Stahl auf Stahl“ mit dem Verhältnis $\max \mu / \min \mu > 5$ um ein Mehrfaches breiter streut als von den Sicherheitsvorschriften für die Bremsverzögerung und den Bremsweg zugelassen wird.

2. Statistische Auswertung von Versuchswerten

Mit Bremsbacken von Fangbremsen einer Standseilbahn wurden auf Schienen Reibversuche durchgeführt. Die Bremsbacken dieser Fangbremsen drücken mit gleichbleibender Federkraft horizontal gegensinnig von beiden Seiten gegen den Schienenkopf. Bei den im Labor durchgeführten Reibversuchen war der Schienenkopf, wie in der Praxis üblich, einerseits teils trocken, teils feucht, vereinzelt auch mit einzelnen Fettflecken beschmutzt, andererseits teils mit Walzhaut, teils mit Flugrost und/oder mit losem Staub beaufschlagt, teilweise aber auch blank gewesen. Nach Aussage des Herstellers der Fangbremsen waren die Bremsbacken mit einer besonderen Härtetechnologie gehärtet worden. Wie wirkt sich diese Härtetechnologie auf den Reibwert μ aus? Erhöht sie ihn, ist sie ohne Einfluss oder wirkt sie gar mindernd? Für die Reibwerte der Bremsbacken mussten deshalb von der beauftragten Prüfstelle, TÜV Thüringen, gesicherte Testwerte gewonnen werden, folgen doch daraus wesentliche Annahmen für die Berechnung von Wagen und Fahrbahn.

Gemessen wurde in der Bewegung und im Ruhezustand die Rutschkraft der Bremsbacke auf der Schiene. Bei Gleitreibung entsprach der kleinste Messwert dem Reibwert $\mu = 0,103$, bei der Haftreibung dem Reibwert $\mu = 0,114$. Der größte gemessene Wert der Rutschkraft ergab bei Gleitreibung den Reibwert $\mu = 0,274$ und bei Haftreibung den Reibwert $\mu = 0,316$.

Der signifikante Unterschied zwischen beiden Arten der Reibung bestand in der Klassenhäufigkeitsverteilung. Diese ist als empirische Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung zu verwenden. Bei der Gleitreibung waren die unteren Klassen am häufigsten besetzt; das ergab die im Bild ① dargestellte rechtsschiefe Verteilung. Bei der Haftreibung dagegen häuften sich die gefundenen Messwerte in den oberen Klassen und ergaben die im Bild ② dargestellte links-schiefe Verteilung.

Da, wie die Bilder 1 und 2 zeigen, beide Arten der Reibung endliche Endwerte > 0 haben, können ihre statistischen Verteilungsfunktionen weder durch die bekannte Gauß-Normalverteilung noch durch eine Log-Normalverteilung, aber auch nicht durch eine Weibull-Verteilung ausreichend genau erfasst werden. Denn neben dem Zentralwert sind es die Endwerte, die den Ingenieur besonders interessieren – sowohl der untere als auch der obere Endwert. Doch gerade die Endwerte können mit diesen drei am meisten geläufigen statistischen Verteilungsfunktionen nicht bestimmt werden.

Eine ingenieurmäßig einfache Lösung des Problems gelingt mit einer „n-fach gestuften Potenz-Sinus-Verteilung“. Deren allgemeine Darstellung ist in rekursiver Form in Gl. (1) angegeben [1]. Dabei ist n die Stufenzahl, q die Unterschreitungswahrscheinlichkeit und x(q) die zu beschreibende zufallsabhängige Größe, hier der zufallsabhängige Reibwert μ . Diese Zufallsgröße kann entweder direkt oder durch Transformation verändert, z. B. logarithmiert, als Merkmalskennwert M(q) eingesetzt werden. Der Zählindex s durchläuft alle natürlichen Zahlen von 1 bis n. Die Exponenten m_1 bis m_s können beliebige reelle Zahlen > 0 sein. Die Endwerte der transformierten Zufallsgröße x(q) sind $\min M = M(q = 0)$ und $\max M = M(q = 1)$.

$$q = F_{s=n};$$

$$F_s = \sin^{m_s} \left(\frac{\pi}{2} \cdot F_{s-1} \right);$$

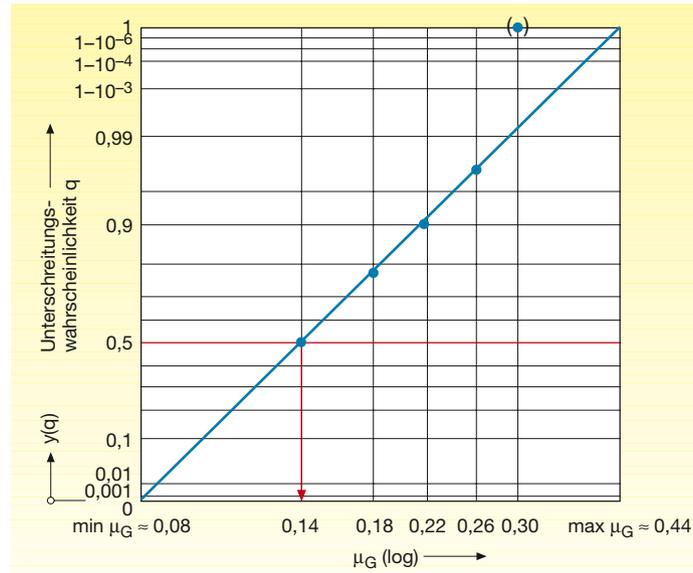
$$F_1 = \sin^{m_1} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M - \min M}{\max M - \min M} \right) \quad (1)$$

Es wurde gefunden, dass im vorliegenden Fall sowohl bei dem für die Gleitreibung geltenden Reibwert μ_G als auch bei dem für die Haftreibung geltenden Reibwert μ_H die Parameterkombination $n = 2, m_1 = 1, m_2 = 2$ mit dem durch Logarithmieren der Zufallsgröße $\underline{x} = \underline{\mu}$ gebildeten Merkmalswert $M = \lg \mu$ am besten geeignet ist. Der Beweis erfolgt in den Bildern 3 und 4 durch Auftragen der Klassierungsergebnisse auf Wahrscheinlichkeitspapier, dessen Ordinate der Gleichung

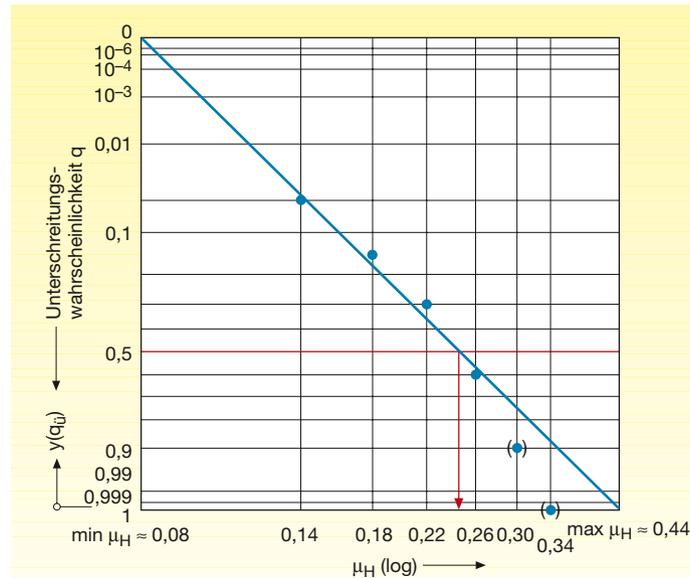
$$y(q) = L \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \sqrt{q} \right) \quad (2)$$

genügt, wobei L die Länge der Ordinaten-skala zwischen $q = 0$ und $q = 1$ ist. Als Abszisse x wird mit der Transformation $M = \lg \mu$ die Zufallsgröße $\underline{\mu}$ in logarithmischer Skalierung aufgetragen.

Bei der Gleitreibung (Bild 3), für die die meisten Messwerte vorlagen, ergeben die als Punkte aufgetragenen Klassierungsergebnisse sehr gut eine Ausgleichsgerade. Das ist der notwendige Beweis dafür, dass



3 Darstellung von $\mu_G(q)$ auf Wahrscheinlichkeitspapier



4 Darstellung von $\mu_H(q)$ auf Wahrscheinlichkeitspapier

die gewählte Parameterkombination (n, m_1, m_2) und das Auftragen des logarithmierten Reibwertes μ zutreffend sind. Diese Ausgleichsgerade ergibt die gesuchten Quantilwerte, und zwar bei $q = 0$ den unteren Endwert, bei $q = 0,5$ den Zentralwert und bei $q = 1$ den oberen Endwert. Ablesbar sind:

$$\min \mu_G = 0,0794 \approx 0,08 \quad (3)$$

$$\text{zentr } \mu_G = 0,14 \quad (4)$$

$$\max \mu_G = 0,441 \approx 0,44 \quad (5)$$

Für die bei der Haftreibung geltenden Reibwerte μ_H kann dasselbe Wahrscheinlichkeitspapier verwendet werden wie für die Reibwerte μ_G , wenn man darin, der linkschiefen Verteilung der Reibwerte μ_H entsprechend, mit gleicher Skalierung die Unterschreitungswahrscheinlichkeit q von oben her abträgt, weil die vom Bild 3 übernommene Ordinatenenteilung bei μ_H

für die Überschreitungswahrscheinlichkeit $q_u = 1 - q$ gilt.

Bild 4 zeigt die dementsprechend vorgenommene Auftragung der Klassierungsergebnisse der Reibwerte μ_H . Weil weniger Messwerte vorlagen, liegen die Punkte zwar nicht ganz so dicht an der eingezeichneten Ausgleichsgeraden, bestätigen diese aber trotzdem, wenn man davon ausgeht, dass der obere Endwert des Reibwertes der Haftreibung nicht kleiner sein kann als der obere Endwert des Reibwertes der Gleitreibung. Werden beide gleichgesetzt, ergibt die im Bild 4 gezeichnete Ausgleichsgerade, dass dann auch die unteren Endwerte des Reibwertes beider Arten der Reibung gleich sind – ein sehr bemerkenswertes Ergebnis! Für den Zentralwert des Reibwertes μ_H kann im Bild 4 abgelesen werden:

$$\text{zentr } \mu_H = 0,2493 \approx 0,25 \quad (6)$$



Mit $\max \mu / \min \mu = 0,44/0,08 = 5,5$ erhält man mit der gewählten Parameterkombination $n = 2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ bei $M = \ln \mu$ aus Gl. (1) zum Berechnen der Quantile $\mu_G(q)$ und $\mu_H(q)$ folgende Gleichungen:

$$\mu_G(q) = 0,08 \cdot \exp \left[\ln 5,5 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \sqrt{q} \right) \right] \quad (7)$$

$$\mu_H(q) = \frac{0,44}{\exp \left[\ln 5,5 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \sqrt{1-q} \right) \right]} \quad (8)$$

3. Schlussfolgerungen

3.1 Vergleich der Ergebnisse mit Reibwertangaben in verschiedenen Normen und in der Fachliteratur

In der ehemaligen DDR-Kranbau-Norm TGL 13470 [2] ist der kleinstmögliche Reibwert μ mit 0,07 angegeben worden. Diese

Angabe deckt sich sehr gut mit den oben ermittelten Werten $\min \mu_G = \min \mu_H = 0,08$.

Die in DIN 15019 T1, Tab. 5 [3] angegebenen Reibungszahlen $\mu = 0,14$ für das gebremste rollende Kranlaufrad und $\mu = 0,25$ für Schienenzangen mit aufgerauten gehärteten Backen sind genau die oben ermittelten Zentralwerte zentr μ_G und zentr μ_H .

In [4, S. 51] wird über Reibwertmessungen an einer elektrischen Lokomotive der Französischen Eisenbahnen berichtet. Bei Fahrgeschwindigkeiten zwischen 0 und 10 km/h lag der höchste gemessene Reibwert μ zwischen 0,4 und 0,45. Bei der Rekordgeschwindigkeit von 331 km/h, die mit dieser Lokomotive erreicht werden konnte, sank der gemessene Reibwert jedoch auf Werte μ zwischen 0,07 und 0,08. Die Übereinstimmung mit den oben ermittelten Endwerten $\max \mu$ und $\min \mu$ ist überraschend und lässt weiterführende Schlüsse zu.

Literatur

- [1] Warkenthin, W.: Quantil-Wöhlerlinien. Vortrag auf der Dresdner Fördertechnik-Tagung 1999. TU Dresden, Tagungsbeiträge 1, S. 23-35.

- [2] TGL 13470: Stahlbau; Stahltragwerke der Hebezeuge; Berechnung; bauliche Durchbildung. Oktober 1974.
 [3] DIN 15019 T1: Krane; Standsicherheit für alle Krane außer gleislosen Fahrzeugkrane und außer Schwimmkrane. September 1979.
 [4] Wende, D.: Fahrdynamik. Berlin: transpress Verlag für Verkehrswesen. Berlin 1983.

(Fortsetzung folgt)

Dr.-Ing. habil. Werner Warkenthin

ist freier Mitarbeiter bei der IFF E & C GmbH in Leipzig



Dipl.-Ing. Reiner Thoß

ist freiberuflicher Statiker und Kransachverständiger in Jena

